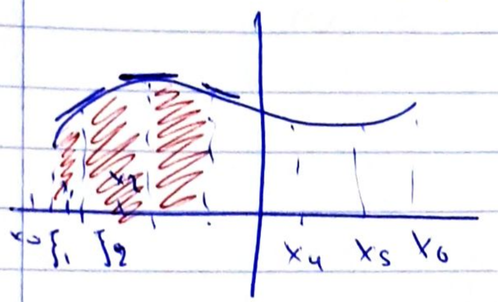
Απειροστικός 2
11/04/2019

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η F είναι ολοκληρ. αν $\exists\, I(F)\in\mathbb{R}$ τ.ω $\forall \varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ τ.ω $\forall P=$ διαμέριση του $[\alpha,b]$ με $\|P\|<\delta$ (όπου $P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$)

και $\forall\, \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $i=1,\dots,n$ να ισχύει

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})F(\xi_i)-I(F)\right|<\varepsilon$$

$I(F)$: ολοκλήρωμα της F κατά Riemann



ΘΕΩΡΗΜΑ: Η $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκλ. κατά Darboux αν-αν η F είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Τότε:

$$I(F)=\int_\alpha^b F(x)dx$$

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) F ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Έστω $\varepsilon>0$, $\exists\, P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ τ.ω $\forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, να ισχύει

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})-I(F)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad (*)$$

Για $i\in\{1,\dots,n\}$ $\exists\, \xi_i\ \xi_i'\in[x_{i-1},x_i]$ τ.ω

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]}F-\frac{\varepsilon}{4}<F(\xi_i) \text{ και } \inf_{[x_{i-1},x_i]}F+\frac{\varepsilon}{4}>F(\xi_i')$$

$$\Rightarrow \sup_{[x_{i-1},x_i]}F-\inf_{[x_{i-1},x_i]}F<F(\xi_i)-F(\xi_i')+\frac{\varepsilon}{2}$$

$(*)$ $\xi_i-\xi_i$ $\quad I(F)-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})F(\xi_i)<I(F)+\frac{\varepsilon}{4}$

$\underline{\xi_i=\xi_i'}$ $\quad$ —"— $<$ —"— $F(\xi_i')<$ —"—

$$U(F,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]}F<\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\left(F(\xi_i)-\frac{\varepsilon}{4(b-\alpha)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})F(\xi_i)+\frac{\varepsilon}{4(b-\alpha)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})$$

$$<I(F)+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4(b-\alpha)}(b-\alpha)$$

$$=I(F)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow U(F,P)<I(F)+\frac{\varepsilon}{2}$ και ομοίως

$$L(F,P)>I(F)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{\int_\alpha^b} F=\inf_P U(F,P)<I(F)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{\int_\alpha^b} F=\sup_P L(F,P)>I(F)-\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F\leq I(F)\leq \underline{\int_\alpha^b} F$$

$$\Rightarrow \overline{\int_\alpha^b} F=\underline{\int_\alpha^b} F=I(F)$$

$\Rightarrow F$ ολοκλ.

$$\int_\alpha^b F(x)dx=\underline{\int_\alpha^b} F(x)dx=\overline{\int_\alpha^b} F(x)dx$$

Εφαρμογή: Εστω $F: [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. Τοτε $\forall$ ακολουθία διαμέρισης $\{P_n\}$ του $[\alpha, b]$ τω $\|P_n\| \to 0$ ισχυει $U(F, P_n), L(F, P_n) \to \int_\alpha^b F(t)dt$

Αποδειξη: F ολοκληρ. κατα Riemann Εστω $\varepsilon > 0$
Εστω P_n ακολουθία διαμερισεων του $[\alpha, b]$
$\|P_n\| \to 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

τω $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ να ισχυει

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) F(\xi_i) I(F) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ με } \|P\| < \delta$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $n > n_0$ $\|P_n\| < \delta$
Για $P = P_n$ απο προηγ. υπολογ. (απο αποδειξη) εχω $U(F, P_n) < \int_\alpha^b F(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$

$$L(F, P_n) > \int_\alpha^b F(t)dt - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} + \int_\alpha^b F(t)dt < L(F, P_n) \leq U(F, P_n) < \int_\alpha^b F(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} < \int_\alpha^b F(t)dt + \varepsilon$$

$$\vee$$

$$-\varepsilon + \int_\alpha^b F(t)dt$$

$$\Rightarrow \left| U(F, P_n) - \int_\alpha^b F(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| L(F, P_n) - \int_\alpha^b F(t)dt \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow U(F, P_n), L(F, P_n) \to \int_\alpha^b F(t)dt$$

ΑΣΚΗΣΗ (2) Έστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,b]$ τω.

$\int_\alpha^b F(t)dt=0$ ΝΔο $F(t)=0$ $\forall t\in[\alpha,b]$

$(F\geq 0)$

Λύση: Έστω ότι $\exists t_0\in[\alpha,b]$ τω $F(t)\neq 0$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ F

$F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Άρα $\forall x\in[\alpha,b]$ η
F είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,x]$

$F(x)=\int_\alpha^x F(t)dt$ (όχι: $\int_\alpha^x F(x)dx$)

αόριστο ολοκλήρωμα της F: $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int^x F(t)dt$
μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι
Lipschitz συνεχής.

Απόδειξη: Θέτω $M=\sup_{[\alpha,b]}|F|<\infty$ (η F είναι φραγμ.)

Έστω $\alpha\leq x\leq y\leq b$ Τότε $|F(x)-F(y)|$

$$=\left|\int_\alpha^y F(t)dt-\int_\alpha^x F(t)dt\right|$$

$$=\left|\int_x^y F(t)dt\right|\leq\int_x^y |F(t)|dt\leq M(y-x)$$

$$=M|y-x|$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και συνεχής στο $x_0\in[\alpha,b]$. Τότε $F'(x_0)=f(x_0)$ όπου

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$$

Ν.δ.ο $F'(x_0)=f(x_0)$ (ομοίως μπορεί ν.δ.ο $F'_-(x_0)=f(x_0)$ άρα η F θα είναι παραγ. στο x_0 με $F'(x_0)=f(x_0)$)

Έστω $b\geq x>x_0$, τότε $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}$

$$=\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\,\delta>0$ τ.ω $\forall t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[\alpha,b]$ να ισχύει $-\varepsilon+f(x_0)<f(t)<f(x_0)+\varepsilon$

Άρα $x\in(x_0,x_0+\delta)\cap[\alpha,b]$ $\forall\, x_0\leq t\leq x$

$f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon$

Άρα $\forall x\in[\alpha,b]$ με $x_0<x<\delta$ ισχύει

$$\underbrace{\int_{x_0}^x[f(x_0)-\varepsilon]dt}_{(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)}\leq\int_{x_0}^x f(t)dt\leq\underbrace{\int_{x_0}^x(f(x_0)+\varepsilon)dt}_{(f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)}$$

$\Rightarrow$ $\forall x\in[\alpha,b]$ με $x_0<x<\delta$: $f(x_0)-\varepsilon\leq\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}\leq f(x_0)+\varepsilon$

-"- $f(x)-\varepsilon\leq\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\leq f(x_0)+\varepsilon<f(x_0)+2\varepsilon$

$$\Rightarrow\underbrace{\lim\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}}_{F'_+(x_0)}=f(x_0)$$

Αν $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τοτε $F'(x)=F(x)\ \forall x\in[\alpha,b]$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Εστω $F, G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ οπου η G είναι παραγ. στο $[\alpha,b]$ Τότε η G λέγεται αντιπαράγωγος η παράγουσα της F, οταν $G'(x)=F(x)$ $\forall x\in[\alpha,b]$

- Αν G_1, G_2 αντιπαράγωγος της $F \Rightarrow G_1'=F$

$G_2'=F \Rightarrow (G_1-G_2)'=0 \Rightarrow$
$G_1=G_2+c$
(οπου $c\in\mathbb{R}$ μια σταθερή)

<u>1ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ</u>

Εστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $F(x)=\int_\alpha^x F(t)\,dt$

(το αόριστο ολοκλήρωμα της F)

Τοτε:
i) $F'(x)=F(x)\ \forall x\in[\alpha,b]$
ii) Αν $G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ μια αντιπαραγ. της F τοτε $\exists\, c\in\mathbb{R}$, τ.ω $G(x)=\int_\alpha^x F(t)\,dt+c\ \forall x\in[\alpha,b]$

Ειδικοτερα $\int_\alpha^b F(t)\,dt=F(b)-F(\alpha)=G(b)-G(\alpha)$

$\int_\alpha^b F(t)\,dt=F(b)-F(\alpha)$

$\int_\alpha^\alpha F(t)\,dt=0=F(\alpha)$

Εστω G αντιπαράγωγος της $F \Rightarrow$
$\exists\, c\in\mathbb{R}$ τ.ω $F=G+c \Rightarrow G(b)-G(\alpha)=F(b)-c-$
$-(F(\alpha)-c)=F(b)-F(\alpha)=$
$\int_\alpha^b F(t)\,dt$